ZAGADNIENIA
EKSPLOATACJI
MASZYN
Zeszyt 3 (151) 2007

HENRYK TOMASZEK*, JÓZEF ŻUREK**, MICHAŁ JASZTAL***

Zarys metody oceny trwałości zmęczeniowej wybranych elementów konstrukcji lotniczych w warunkach eksploatacyjnego widma obciążenia dla wzoru Parisa o wykładniku m≠2

Słowa kluczowe

Pękanie zmęczeniowe, stan graniczny (dopuszczalny), trwałość zmęczeniowa, funkcja gęstości.

Keywords

Fatigue crack, limiting state, fatigue life, load spectrum, density function.

Streszczenie

W artykule została podana metoda określenia rozkładu czasu (nalotu) trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego dla eksploatacyjnego widma obciążenia. Od strony fizycznej metoda bazuje na wzorze Parisa, przy czym rozpatrywany jest przypadek, gdy wykładnik potęgi w ww. wzorze $m \neq 2$.

W artykule wykorzystano sposób określenia narastania długości pęknięcia w ujęciu losowym podany w pracy [2].

* Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa 46, tel. 022 685-19-56; Wydział Mechatroniki, Wojskowa Akademia Techniczna, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa.

** Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa 46, tel. 022 685 21 63.

*** Wydział Mechatroniki, Wojskowa Akademia Techniczna, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, tel. 022 683-98-51.

1. Wprowadzenie

W artykule podjęta jest próba wyznaczenia rozkładu trwałości elementu konstrukcji lotniczej pracującego w warunkach zmęczenia dla następujących danych i przyjętych założeń:

- Prędkość narastania pęknięcia następuje według wzoru Parisa, dla $m \neq 2$.
- Obciążeniem elementu konstrukcji są naprężenia powstające w czasie lotu statku powietrznego.

Przyjmuje się, że w czasie jednego lotu obciążenie daje się sprowadzić do wartości zestawionych w tabeli 1.

Tabela 1

Wartość maksymalna naprężenia w progu	$\sigma_1^{\max}$	$\sigma_2^{\max}$	$\dots$	$\sigma_L^{\max}$
Częstość występowania	$P_1 = \frac{n_1}{N_c}$	$P_2 = \frac{n_2}{N_c}$	$\dots$	$P_L = \frac{n_L}{N_c}$

gdzie:

$$\sigma_i^{\max} = \frac{\sigma_i^{\max} + \sigma_i^{\min}}{2} + \sigma_i^a \text{ ; (i = 1, 2,..., } L) \tag{1}$$

$\sigma_i^{\max}$ – maksymalna wartość naprężenia cyklicznego w i-tym progu;

$\sigma_i^{\min}$ – minimalna wartość naprężenia cyklicznego w i-tym progu;

σ_i^a – amplituda obciążenia cyklicznego w i-tym progu;

L – liczba (progów) przyjętych dyskretnych wartości naprężenia;

N_c – liczba cykli obciążenia w jednym standardowym locie statku powietrznego ($\sum_{i=1}^{L} n_i = N_c$);

n_i – liczba powtórzeń naprężenia $\sigma_i^{\max}$ w czasie lotu standardowego statku powietrznego.

Dla przyjętych wyżej ustaleń w pracy [2] została określona funkcja gęstości długości pęknięcia w zależności od nalotu statku.

Funkcja gęstości długości pęknięcia określona została w postaci:

$$u(a,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}} \tag{2}$$

gdzie:

a – długość pęknięcia,

t – nalot statku powietrznego,

$B(t)$ – wartość oczekiwana długości pęknięcia określona wzorem:

$$B(t)=[a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\lambda CM_k^m\pi^{\frac{m}{2}}E[(\sigma^{\max})^m]t]^{\frac{2}{2-m}}-a_o \tag{3}$$

$A(t)$ – wariancja długości pęknięcia określona wzorem:

$$A(t)=\frac{2}{2+m}CM_k^m\pi^{\frac{m}{2}}\frac{E[(\sigma^{\max})^{2m}]}{E[(\sigma^{\max})^m]}\left[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\lambda CM_k^m\pi^{\frac{m}{2}}E[(\sigma^{\max})^m]t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}\right] \tag{4}$$

Oznaczenia:

C – stała materiałowa we wzorze Parisa;

M_k – współczynnik skończoności wymiarów elementu i miejsca położenia pęknięcia;

$E[(\sigma^{\max})^{2m}]=P_1(\sigma_1^{\max})^{2m}+P_2(\sigma_2^{\max})^{2m}+...+P_L(\sigma_L^{\max})^{2m}$;

$E[(\sigma^{\max})^m]=P_1(\sigma_1^{\max})^m+P_2(\sigma_2^{\max})^m+...+P_L(\sigma_L^{\max})^m$;

a_o – początkowa długość pęknięcia;

– intensywność pojawiania się cykli obciążenia $(\lambda=\frac{1}{\Delta t})$;

Δt – czas trwania cyklu obciążenia.

Mając określoną funkcję gęstości długości pęknięcia zależną od nalotu statku powietrznego w pracy [2] zostało następnie określone ryzyko uszkodzenia polegające na przekroczeniu przez bieżącą wartość długości pęknięcia wartości granicznej (dopuszczalnej).

Wzór obliczeniowy przyjmuje postać:

$$Q(t)=\int_{a_d}^{\infty}u(a,t)da \tag{5}$$

gdzie: $Q(t)$ – ryzyko uszkodzenia;

a_d – dopuszczalna (graniczna) wartość długości pęknięcia;

$u(a,t)$ – funkcja określona zależnością (2).

Wykorzystując zależność (5) podjęta zostanie próba wyznaczenia rozkładu czasu przekroczenia przez bieżącą wartość pęknięcia wartości granicznej (dopuszczalnej).

2. Określenie rozkładu trwałości elementu konstrukcji

Funkcja gęstości rozkładu czasu nalotu do chwili przejścia wartości pęknięcia poza wartość dopuszczalną będzie:

$$f(t)_{a_d} = \frac{\partial}{\partial t} Q(t; a_d) \tag{6}$$

Zależność (6) można napisać w postaci:

$$f_{a_d}(t) = \int_{a_d}^{\infty} \{\frac{\partial}{\partial t} u(a,t)\}\, da \tag{7}$$

Aby wyznaczyć wartość całki (7), należy:

- wyznaczyć pochodną po czasie funkcji $u(a, t)$;
- znaleźć funkcję pierwotną dla wyrażenia podcałkowego w zależności (7).

Wyznaczenie pochodnej po czasie funkcji (2) dokonujemy w następujący sposób:

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(a,t)] = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\, A(t)}}\right)'}_{D} e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\, A(t)}}\right) \cdot \underbrace{\left(e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}}\right)'}_{F} \tag{8}$$

$$D = \frac{\lambda C M_k^m \pi^{\frac{m}{2}} E[(\sigma^{\max})^m] (a_o^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C M_k^m \pi^{\frac{m}{2}} E[(\sigma^{\max})^m] t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2 \frac{2}{2+m} [(a_o^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C M_k^m \pi^{\frac{m}{2}} E[(\sigma^{\max})^m] t)^{\frac{2+m}{2-m}} - a_o^{\frac{2+m}{2}}] \sqrt{2\pi\, A(t)}} \tag{9}$$

Oznaczamy:

$$\hat{C} = C M_k^m \pi^{\frac{m}{2}} E[(\sigma^{\max})^m] \tag{10}$$

Stąd:

$$D=-\left(\frac{\lambda\hat{C}(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}}{2\frac{2}{2+m}[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]\sqrt{2\pi A(t)}}\right) \tag{11}$$

Obliczenie F:

$$F=\left(e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}}\right)'=e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}}\underbrace{\left(-\frac{[(a-B(t))^2]'2A(t)-(a-B(t))^2\cdot 2A(t)'}{4(A(t))^2}\right)}_{G} \tag{12}$$

Oznaczamy:

$$\omega=\frac{E[(\sigma^{\max})^{2m}]}{(E[(\sigma^{\max})^m])^2} \tag{13}$$

$$A(t)=\frac{2}{2+m}\hat{C}\omega[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}] \tag{14}$$

$$B(t)=\left\{[a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t]^{\frac{2}{2-m}}-a_o\right\} \tag{15}$$

Obliczenie G:

$$G=\frac{(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{m}{2-m}}\cdot(a-B(t))\ (\frac{2-m}{2})}{\frac{2}{2+m}\omega[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]}+$$

$$+\frac{(a-B(t))^2\,2\hat{C}^2\omega\,\lambda(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2\frac{4}{(2+m)^2}\hat{C}^2\omega^2[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]^2} \tag{16}$$

Wracamy do wzoru (8). Stąd po uwzględnieniu (11) i (16) otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(a,t)]=-\frac{\lambda\hat{C}\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2m}{2-m}}}{2\left[\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}\right]\left(\frac{2}{2+m}\right)}u(a,t)+$$

$$+\frac{\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{m}{2-m}}\cdot(a-B(t))\left(\frac{2-m}{2}\right)}{\frac{2}{2+m}\,\omega\left[\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}\right]}u(a,t)+$$

$$+\frac{(a-B(t))^2\,\lambda\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2m}{2-m}}}{2\frac{4}{(2+m)^2}\,\omega\left[\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}\right]^2}u(a,t) \tag{17}$$

Przyjmujemy teraz, że funkcja pierwotna w zależności (7) będzie:

$$w(a,t)=u(a,t)\cdot\theta(a,t) \tag{18}$$

gdzie: $\theta(a,t)$ jest wyrażeniem poszukiwanym.

Pochodna funkcji pierwotnej $w(a,t)$ po długości pęknięcia powinna być równa wyrażeniu (17). Pochodna po „a” funkcji pierwotnej będzie:

$$\frac{\partial w(a,t)}{\partial a}=u'(a,t)\,\theta(a,t)+u(a,t)\,\theta'(a,t) \tag{19}$$

Wyznaczamy pochodną:

$$\frac{\partial u(a,t)}{\partial a}=u(a,t)\left(-\frac{(a-B(t))}{A(t)}\right) \tag{20}$$

Uwzględniając (20), otrzymujemy:

$$\frac{\partial w(a,t)}{\partial a}=u(a,t)\left(-\frac{(a-B(t))}{A(t)}\right)\underbrace{(?)}_{\theta(a,t)}+u(a,t)\cdot\underbrace{(?)}_{\theta'(a,t)} \tag{21}$$

Zależność (21) porównujemy z (17):

$$\left\{\frac{(a-B(t))(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{m}{2-m}}(\frac{2-m}{2})\hat{C}}{\frac{2}{2+m}\omega[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]\hat{C}}+\frac{(a-B(t))^2\lambda(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}\omega\hat{C}^2}{2\frac{4}{(2+m)^2}\omega[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]^2\omega\hat{C}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda\hat{C}(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}\hat{C}\omega}{2[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]\hat{C}\omega(\frac{2}{2+m})}\right\}u(a,t)=u(a,t)\left(-\frac{(a-B(t))}{A(t)}\right)\underbrace{(?)}_{\theta(a,t)}+u(a,t)\theta'(a,t) \tag{22}$$

Z równania (22) otrzymujemy:

$$u(a,t)\left\{\frac{(a-B(t))(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{m}{2-m}}(\frac{2-m}{2})\hat{C}}{\frac{2}{2+m}\omega\hat{C}[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]}+\frac{(a-B(t))^2\lambda\omega\hat{C}^2(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2\frac{4}{(2+m)^2}\omega^2\hat{C}^2[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]^2}\right\}=$$

$$=u(a,t)\left(-\left(\frac{(a-B(t))}{A(t)}\right)\right)\underbrace{(?)}_{\theta(a,t)} \tag{23}$$

$$u(a,t)\left\{-\frac{\lambda\hat{C}^2\omega(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2(\frac{2}{2+m})\hat{C}\omega[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2+m}{2-m}}-a_o^{\frac{2+m}{2}}]}\right\}=u(a,t)\theta'(a,t) \tag{24}$$

Z równania (23) wyznaczamy funkcję $\theta(a,t)$:

$$\theta(a,t)=\left[-(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{m}{2-m}}(\frac{2-m}{2})\hat{C}-\frac{(a-B(t))\lambda\omega\hat{C}^2(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2A(t)}\right] \tag{25}$$

Pochodna po „*a*" funkcji określonej zależnością (25) wynosi:

$$\frac{\partial\theta(a,t)}{\partial a}=-\frac{\lambda\omega\hat{C}^2(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2A(t)} \tag{26}$$

Otrzymana pochodna potwierdza słuszność równości (24).

W zależnościach (23), (24), (25) i (26) wielkości zapisane skrótowo oznaczają:

$B(t)$ – określone jest przez (15),

$A(t)$ – określone jest przez (14),

ω – określone jest przez (13),

$\hat{C}$ – określone jest przez (10).

Stąd otrzymujemy wyrażenie na funkcję pierwotną całki (7):

$$w(a,t)=u(a,t)\left[-\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{m}{2-m}}\left(\frac{2-m}{2}\right)\hat{C}-\frac{(a-B(t))\lambda\omega\hat{C}^2\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2m}{2-m}}}{2A(t)}\right] \tag{27}$$

Obliczając całkę (7), otrzymujemy poszukiwaną funkcję gęstości czasu (nalotu) przekraczania przez bieżącą wartość długości pęknięcia wartości dopuszczalnej (granicznej).

$$f(t;a_d)=w(a,t)\Big|_{a_d}^{\infty}=$$

$$=u(a_d,t)\left[\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{m}{2-m}}\left(\frac{2-m}{2}\right)\hat{C}+\frac{(a+B(t))\lambda\omega\hat{C}^2\left(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t\right)^{\frac{2m}{2-m}}}{2(A(t))}\right] \tag{28}$$

gdzie:
$$u(a_d,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}}\,e^{-\frac{(a_d-B(t))^2}{2A(t)}}.$$

Zależność (28) określa trwałość zmęczeniową wybranego elementu konstrukcji lotniczej w warunkach eksploatacyjnego widma obciążenia dla wzoru Parisa o wykładniku $m\neq 2$.

3. Uwagi końcowe

Otrzymana postać funkcji gęstości trwałości zmęczeniowej określona zależnością (28) wymaga jeszcze weryfikacji, tzn. sprawdzenia, czy posiada ona cechy funkcji gęstości lub wymaga unormowania.

W pracy [3] określona została funkcja gęstości czasu do osiągania stanu granicznego (dopuszczalnego) w prostszym przypadku, dla którego weryfikacja okazała się możliwa. Dokonano tego w pracy [4]. Próba weryfikacji otrzymanej funkcji gęstości i wyznaczenia parametrów rozkładu podjęta zostanie w następnych pracach.

Do określenia ryzyka uszkodzenia elementu konstrukcji z wykorzystaniem funkcji gęstości (28) wykorzystujemy zależność:

$$Q(t) = \int_0^t f(z; a_d) dz,$$

gdzie: $Q(t)$ – ryzyko uszkodzenia elementu konstrukcji w aspekcie zmęczenia w przedziale nalotu $(0,t)$.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2006–2008 jako projekt badawczy.

Praca wpłynęła do Redakcji 17.04.2007 r.

Literatura

[1] Szczepanik R., Tomaszek H., Jasztal M.: Zarys metody określenia rozkładu czasu narastania pęknięcia elementu do wartości granicznej w warunkach zmęczenia w procesie eksploatacji statku powietrznego. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn. Zeszyt 3(147), 2006.
[2] Szczepanik R., Tomaszek H., Jasztal M.: Zarys metody wyznaczania ryzyka uszkodzenia i trwałości zmęczeniowej wybranych elementów konstrukcji lotniczej w warunkach eksploatacji z zastosowaniem wzoru Parisa dla m≠2. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn (artykuł przyjęty do druku), 2007.
[3] Szczepanik R., Tomaszek H.: Metoda określenia rozkładu czasu do przekroczenia stanu granicznego. ZEM, Zeszyt 4(144), 2005, s. 35–44.
[4] Szczepanik R., Tomaszek H.: Niektóre charakterystyki rozkładu czasu przekraczania stanu granicznego (dopuszczalnego). ZEM, Zeszyt 1(145), 2006, s. 99–105.
[5] Loroch L., Tomaszek H., Żurek J.: Zarys metody określenia prognozy niezawodności urządzeń statków powietrznych na podstawie zmian wartości parametrów diagnostycznych z możliwością powstawania uszkodzeń katastroficznych. ZEM, Zeszyt 2(138), 2004, s. 65–76.
[6] Kocańda D.: Zmęczeniowe pękanie metali. WNT, 1985.

Outline of the method of fatigue life determination selected aircraft's elements in using load spectrum condition, with use of Paris formula for m≠2

S u m m a r y

Method of distribution of fatigue life (flying time) determination selected aircraft's elements in using load spectrum condition has been presented in this paper. Authors took into consideration Paris formula for m≠2 as a starting point for mathematical model creation.

Crack length density function (depending on flying time) was established in the form:

$$u(a,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}}\,e^{-\frac{(a-B(t))^2}{2A(t)}} \tag{*}$$

where:

$B(t)$ – expected value of fatigue crack length a during t time;

$A(t)$ – variance of fatigue crack length a during t time.

Furthermore, equation (*) serve for determination of density function of time (flying time) while crack length exceeds limiting value in the form:

$$f(t;a_d)=u(a_d,t)\left[(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{m}{2-m}}(\frac{2-m}{2})\hat{C}+\frac{(a+B(t))\lambda\omega\hat{C}^2(a_o^{\frac{2-m}{2}}+\frac{2-m}{2}\hat{C}\lambda t)^{\frac{2m}{2-m}}}{2(A(t))}\right]$$

(**)

It is necessary to say that carried out function (**) maybe requires normalization.